-EXERCICE 29.2-

• ENONCE :

« Effet de peau »

On considère un conducteur ohmique homogène de conductivité $\gamma = 5.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$, qui occupe le demi-espace défini par $z \geq 0$.

Le conducteur est parcouru par des courants de densité volumique : $\vec{j} = j(z,t)\vec{e}_y$, et on se limitera aux fréquences industrielles et radio.

1) Etablir l'équation différentielle satisfaite par $\vec{j}$; résoudre cette équation en cherchant des solutions à variations sinusoïdales dans le temps (on pourra s'intéresser à la signification physique des autres solutions).

On fera apparaître une distance caractéristique δ dont on donnera l'interprétation physique.

A.N : calculer δ pour $f_1 = 50Hz$ et $f_2 = 100MHz$; conclure.

2) Exprimer en fonction de δ, a et j_0 (=amplitude de $\vec{j}$ en z=0) l'intensité efficace I du courant qui parcourt la région du conducteur définie par : $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

Rq : on rappelle la définition de la valeur efficace d'un courant i(t) de période T : $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$; en anglais, la valeur efficace est notée : « **R.M.S** » = « Root Mean Square », et donne aux étudiants la suite des opérations à mener pour la calculer…

3) Exprimer en fonction de I, a, b, γ et δ la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la région du conducteur définie par : $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et: $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.

En déduire une interprétation énergétique de la grandeur δ.

4) Décrire des situations physiques où se manifeste « l'effet de peau ».

Rq : on donne une primitive de : $\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)$, soit :

$$-\frac{\delta}{2}\exp(-z/\delta)[\cos(\omega t - z/\delta) + \sin(\omega t - z/\delta)]$$

• CORRIGE :

« Effet de peau »

1) • L'équation différentielle en $\vec{j}$ est la même qu'en $\vec{E}$; systématiquement, pour obtenir cette équation différentielle, nous appliquerons l'opérateur « rot » à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \text{ (puisque } div\vec{E}=0\text{, cf.exercice 29.1)} \Rightarrow -\Delta\vec{E} = -\overrightarrow{rot}(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\vec{B})}{\partial t}$$

$\Rightarrow \Delta\vec{E} = \dfrac{\partial(\mu_0\vec{j})}{\partial t} = \dfrac{1}{\gamma}\Delta\vec{j} \Rightarrow \Delta\vec{j} - \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$;en projection sur $\vec{e}_y$, il vient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 j(z,t)}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\dfrac{\partial j(z,t)}{\partial t} = 0}$

Rq : c'est une « **équation de DIFFUSION** », que l'on rencontrera dans d'autres parties du programme (diffusion thermique, diffusion de particules, mécanique des fluides visqueux…)

• Il n'y a pas de méthode générale de résolution des équations différentielles aux **dérivées partielles** ; mais, ici, les variables sont « séparées » : il n'y a pas de terme en $\dfrac{\partial^2 j}{\partial x\partial t}$ et l'équation est **linéaire** ⇒ on passe en complexe et l'on peut chercher des solutions du type : $\underline{j}(z,t) = f(z)\times g(t)$ (f et g sont complexes) ; on reporte dans l'équation de diffusion pour obtenir :

$f''(z)\times g(t) = \mu_0\gamma f(z)\times g'(t) \Rightarrow \dfrac{f''(z)}{f(z)} = \mu_0\gamma\dfrac{g'(t)}{g(t)} = cste$, puisque z et t sont des **variables indépendantes**. On a alors, après intégration : $g(t) = A\exp[(\alpha+i\omega)t]$ où α et $\omega \in \mathbb{R}$.

♦ $\underline{\alpha \succ 0}$: lorsque $t\to\infty$, $j(z,t)$ **diverge** (à z fixé), ce qui n'est pas « physique » pour un milieu non amplificateur (qui ne dispose pas de « réserve » d'énergie) ; en revanche, dans des montages utilisant des A.O, ce type de solution pourra être retenu, la divergence temporelle conduisant à la saturation.

♦ $\underline{\alpha \prec 0}$: lorsque $t\to\infty$, $j(z,t)\to 0$ (à z fixé) : cette solution est donc également **instable** temporellement.

Finalement, lorsque l'énoncé préconise de retenir les solutions à variations sinusoïdales dans le temps, c'est pour rejeter les instabilités temporelles ; avec $g(t) = A\exp(i\omega t)$, il vient :

$\boxed{f''(z) - i\mu_0\gamma\omega f(z) = 0}$ (avec : $g'(t) = i\omega g(t)$) ; l'équation caractéristique s'écrit :

$r^2 = i\mu_0\gamma\omega \Rightarrow r = \pm\sqrt{\dfrac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1+i)$ puisque: $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$;posons : $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}} \Rightarrow \boxed{r = \pm\dfrac{1+i}{\delta}}$; d'où :

$\underline{j}(z,t) = A\exp(-z/\delta)\exp[i(\omega t - z/\delta)] + B\exp(z/\delta)\exp[i(\omega t + z/\delta)]$; lorsque $z\to\infty$, la partie réelle de $\underline{j}(z,t)$ va **diverger**, ce qui n'est pas « physique » ⇒ <u>B=0</u> ; en repassant en réel :

$$\boxed{\vec{j}(z,t) = j_0\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)\vec{e}_y}$$

• On a une **onde plane** de courant (l'amplitude est constante sur tout plan z=cste), **harmonique** ; la **phase** se **propage** à la vitesse $v_\varphi = \omega\delta$ de manière **dispersive** car $v_\varphi \sim \sqrt{\omega}$.

En revanche, l'amplitude s'amortit exponentiellement dans le sens de la propagation : l'onde est dite « **O.P.P.M exponentiellement amortie** » ou « **pseudo-O.P.P.M** ».

Pour $z = 3\delta$, l'amplitude de l'onde ne vaut plus que : $j_0 \exp(-3) = 0,05 j_0$; le courant n'existe donc que sur une épaisseur de quelques δ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta \text{ est appelée « épaisseur de peau »}}$

Rq : on devrait rajouter « électromagnétique », car cet « effet de peau » existe dans d'autres domaines de la physique (diffusion thermique ou particulaire, diffusion de quantité de mouvement en mécanique des fluides visqueux…) : chaque fois qu'une grandeur physique satisfera à une équation de type diffusion, on pourra définir une épaisseur de peau (pour le phénomène étudié) , dont la caractéristique commune sera d'être $\boxed{\text{proportionnelle à } \dfrac{1}{\sqrt{\omega}}}$.

- A.N : $\boxed{f_1 = 50Hz : \ \delta_1 \simeq 1cm}$ et : $\boxed{f_2 = 100MHz : \ \delta_2 \simeq 7\mu m}$ (avec : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} S.I$)

$\Rightarrow$ à partir de f=500KHz, l'épaisseur de peau devient inférieure à 0,1mm : le courant dans un métal est alors purement **surfacique**.

2) Calculons d'abord la valeur instantanée du courant :

$i(t) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ où (S) est une section du conducteur de largeur a et de hauteur illimitée selon Oz

$$i(t) = \int_0^\infty j(z,t) \times adz = aj_0 \int_0^\infty \exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)dz = -aj_0 \frac{\delta}{2}\{\exp(-z/\delta)[\cos(\omega t - z/\delta) + \sin(\omega t - z/\delta)]\}_0^\infty$$

$\Rightarrow \boxed{i(t) = aj_0 \dfrac{\delta}{2}(\cos\omega t + \sin\omega t)}$ (en utilisant l'indication de l'énoncé et en tenant compte du fait que $\cos(\omega t - z/\delta)$ et $\sin(\omega t - z/\delta)$ sont bornés lorsque $z \to \infty$) ; d'où :

$$I^2 = \frac{(aj_0\delta)^2}{4} \times \frac{1}{T}\int_0^T (\cos\omega t + \sin\omega t)^2 dt = \frac{(aj_0\delta)^2}{4} \times \frac{1}{T}\int_0^T (1 + 2\sin\omega t\cos\omega t)dt = \frac{(aj_0\delta)^2}{4} \quad (\langle \sin 2\omega t \rangle_T = 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{a\delta j_0}{2}}$$

3) • Nous allons utiliser la loi de Joule locale :

$\dfrac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \dfrac{j^2}{\gamma} \Rightarrow P_J = \iiint_V j^2(z,t)d\tau$ où (V) est le volume d'un parallélépipède de base ab et de hauteur illimitée ; l'élément de volume sera donc une « plaque » de surface ab et de hauteur dz :

$P_J(t) = \dfrac{abj_0^2}{\gamma}\displaystyle\int_0^\infty \exp(-2z/\delta)\cos^2(\omega t - z/\delta)dz$; en fait, c'est la valeur moyenne de P_J qui nous intéresse : puisque les variables z et t sont **indépendantes**, nous allons permuter les opérations d'intégration spatiale et temporelle, d'où :

$$\langle P_J \rangle_T = \frac{abj_0^2}{\gamma}\int_0^\infty \exp(-2z/\delta)\langle \cos^2(\omega t - z/\delta)\rangle_T dz \Rightarrow \langle P_J \rangle_T = \frac{abj_0^2}{2\gamma}\int_0^\infty \exp(-2z/\delta)dz$$

$$\Rightarrow \langle P_J \rangle_T = \frac{abj_0^2}{2\gamma} \times \frac{-\delta}{2} \times [\exp(-2z/\delta)]_0^\infty = \frac{ab\delta j_0^2}{4\gamma} \Rightarrow \boxed{\langle P_J \rangle_T = \frac{1}{\gamma} \times \frac{b}{a\delta} \times I^2}$$

Rq : on a bien une relation du type : $P_J = RI^2$ avec pour un conducteur « droit » :

$R=\frac{1}{\gamma}\times\frac{l}{S}$ où l est une longueur comptée dans le sens du courant (ici, c'est b, selon Oy) et S une section perpendiculaire au courant : ici, S vaut $a\delta$; ceci montre qu'une « plaque » de longueur b, de largeur a et **d'épaisseur** δ (épaisseur de peau), parcourue par un **courant continu I** verrait les mêmes pertes par effet Joule que la structure réelle.

4) On peut proposer deux situations physiques nettement différentes dans lesquelles intervient l'effet de peau :

- considérons des composants électroniques devant fonctionner en interrupteur (transistors ou thyristors) ; lorsqu'une des 3 bornes (la base ou la gâchette) reçoit une impulsion (commandée par l'utilisateur), l'interrupteur devient passant : si un signal perturbateur de haute fréquence (ondes radio, onde générée par la foudre ...) déclenche le composant de manière intempestive, les conséquences peuvent être dommageables (court-circuit par exemple). On peut alors entourer le composant d'une **mince** plaque de métal qui empêchera la propagation des parasites : on a réalisé un « **BLINDAGE** » (non efficace pour les basses fréquences comme le 50Hz, car ce type de blindage serait trop épais, donc lourd et encombrant).

- considérons maintenant un fil électrique à section circulaire parcouru par un courant variable. La géométrie n'est évidemment plus la même que celle étudiée dans la question 1); ici, l'interface métal-air est courbe : on peut montrer que si δ est très inférieure au rayon de courbure, le modèle développé dans la question 1) est valide.

Les lignes de courant sont donc « repoussées » à la périphérie du fil d'alimentation : la section **effective** à travers laquelle passe le courant est donc plus petite que la section réelle du fil et sa résistance est plus grande, entraînant des **pertes par effet Joule plus importantes** (dégradation du rendement pour des installations de puissance).

Le dimensionnement classique des fils est de $5A/mm^2$; pour un appareil domestique (puissance maximum de quelques KW), le courant maximum sera de l'ordre de $15A$ (sous $U=220V$), la section de $3mm^2$ et le rayon de $1mm$: pour une fréquence de 50Hz, nous avons trouvé $\delta\simeq 1cm$ (compté à partir de la périphérie), le phénomène de peau est donc à peine perceptible et non gênant. En revanche, pour des alternateurs, les courants sont de quelques milliers d'ampères (encore plus pour des électrolyseurs), la surface de l'ordre de $10cm^2$ et le rayon de quelques centimètres : l'effet de peau est alors très sensible. En pratique, pour pallier ce problème, les « fils » seront à **section rectangulaire**, très **plats** (cette géométrie présente en outre l'avantage d'augmenter la surface de contact avec le milieu environnant, donc de faciliter le transfert thermique vers l'extérieur). Il est clair qu'il faudra prendre en compte le phénomène de peau pour des dispositifs moins puissants, mais travaillant à des fréquences plus élevées.